Písemka z MA2, varianta B **30. 4. 2015**

1. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$.

Řešení:
Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro množinu $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, kde $g(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$. Pro extrém $a = (x,y)$ na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1,-1) = f'_{|a} = \lambda g'_{|a} = \lambda \cdot \Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $x = -y$. Kandidáti na extrémy jsou tedy body

$$(1,-1), \quad (-1,1)$$

s hodnotami

$$f(1,-1) = 5, \quad f(-1,1) = 1.$$

Vyšetříme ještě omezenost množiny M. Doplněním na čtverec $1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\Big(x + \frac{5}{6}y\Big)^2 + \frac{11}{12}y^2$ zjistíme, že jde o (natočenou) elipsu, tedy omezenou množinu. To lze zjistit i z toho, že bilineární forma $g(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2$ je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima a minima v bodech $(1,-1)$ a $(-1,1)$.

2. Nalezněte úhel, který v bodě $(1,0,0)$ svírají grafy funkcí

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{a} \quad g(x,y) = \sin(xy).$$

Řešení:
Úhel, který svírají grafy funkcí je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory, tj. gradienty. Grafy si zadáme implicitně:

pro f to bude $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0 \;\&\; (x,y) \neq (0,0)\}$, kde

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - z$$

a pro g to bude $\Gamma_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0\}$, kde

$$G(x,y,z) = \sin(xy) - z.$$

Normálové vektory tečných rovin jsou nyní

$$\mathbf{N}_1 = \text{grad } F_{|(1,0,0)} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, -1\right)_{|(1,0,0)} = (1,0,-1)$$

$$\mathbf{N}_2 = \text{grad } G_{|(1,0,0)} = \Big(y\cos(xy), x\cos(xy), -1\Big)_{|(1,0,0)} = (0,1,-1)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je nyní dán jako

$$\cos\alpha = \frac{\left|\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2\right|}{||\mathbf{N}_1|| \cdot ||\mathbf{N}_2||} = \frac{1}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3. Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS,$$

kde E je oblast v prvním kvadrantu omezená křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:
Oblast integrace

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y^2 \ \&\ 0 < y \le 1\}$$

je omezená, ale u funkce $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0, 0)$. Vyšetříme tedy chování f na E v tomto bodě. Protože pro $(x, y) \in E$ máme $0 \le x \le y^2$ a $0 < y$, tak $0 \le \frac{x}{y} \le y$ a tedy

$$1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^y \to 1$$

pro $(x, y) \to (0, 0)$ a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje.

Pro výpočet použijeme Fubiniho větu

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_{x=0}^{x=y^2}\ dy = \int\limits_0^1 ye^y - y\ dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$